Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche
Vol. XV (1995) fasc. 1

Linee larghe
Un'ambiguità geometrica dimenticata

Jens Høyrup*

In memoriam
A.P. Youschkevitch 1906-1993
et
Ivor Bulmer-Thomas, 1905-1993

Le pagine che seguono esplorano le tracce di un modo di pensare le aree e le lunghezze che a noi pare strano ma che in varie culture matematiche è stato così consueto che era superfluo spiegarlo; così strano e così consueto, infatti, che gli storici moderni hanno dichiarato sbagliati, confusi o privi di senso i passi nelle fonti che riflettono questa struttura concettuale. Si tratta dell'abitudine di immaginarsi le linee come portatrici di una larghezza virtuale di un'unità, e le aree come composte di strisce unitarie di questa sorta; abitudine diffusa in molti ambienti di agrimensura pratica (dove è facile, grazie all'uniformità delle usanze, essere d'accordo su una sola larghezza standardizzata: quella dell'unità primaria di lunghezza; dove, per così dire, la terra si misura come si vendono ancora oggi le stoffe con la loro larghezza fisicamente fissata) — abitudine però che si riflette anche in testi con provenienza più teorica benché ancora ispirati o tinti dalla misura pratica e dal suo linguaggio.

1. Agrimensura italiana, da Fibonacci a Pacioli

Nell'introduzione alla sua *Practica geometriae*, Leonardo Fibonacci fa un'esposizione della misura lineare e di quella superficiale [ed. Boncompagni 1862: pag. 3-4]. Le prime righe non hanno niente che possa

* Dipartimento di Lingua e Cultura, Roshilde Universitet, Danimarca. Ringrazio Isabella Chiari sia per la correzione linguistica che per avermi incoraggiato a scrivere in italiano. Visto che sono stato io a procurare la boscaglia sintattica iniziale, e che ho dovuto riformulare parecchi passi dopo il controllo, è ovvio che rimango il solo responsabile degli errori e dei periodi inadatti che restano.

sorprendere una mente moderna: il *cubitus superficialis* è un quadrato con lato uguale ad un *cubitus linealis*; la stessa relazione vale per l'*ulna superficialis* rispetto all'*ulna linealis* e per la *pertica superficialis* rispetto alla *pertica linealis*.

A partire di questo punto, il pisano Fibonacci procede con il sistema utilizzato a Pisa — che si distingue delle nostre abitudini. Una pertica, in verità, è composta di 6 piedi, e il piede di 18 punti o once. Anche una pertica quadrata o superficiale è composta di 6 piedi superficiali poiché (come spiega Fibonacci) un piede superficiale possiede la lunghezza di 1 pertica ed la larghezza di 1/6 di pertica (ossia 1 piede). La misura di un piede quadrato, invece, si chiama *denarius*. Una oncia superficiale ugualmente è un rettangolo 1 pertica × 1 oncia.

Per le aree più grandi sono utilizzati la *scal* (= 4 pertiche), il *panorum* (= 5 1/2 pertiche), lo *stariorum* (= 12 panori) ed il *modiorum* (= 24 staiori). Tutte queste sono dapprima misure superficiali, ma sono anche intese come misure lineari, dove 1 panoro lineare è la lunghezza che, provvista di una larghezza di 1 pertica, è uguale a 1 panoro superficiale. Sono utilizzati (ci dice Fibonacci) nel commercio dei campi, dei terreni fabbricabili e delle case; dunque nella vita pratica.

Altrettanto si trova quando Luca Pacioli spiega nella parte geometrica della *Summa di arithmetica* [1523: II, fol. 6v-7r] le misure utilizzate a Firenze nella vendita dei terreni. Qui, la larghezza ricorrente è il *braccio*:

> Multiplicando bracia per bracia: fanno bracia quadre.
> Multiplicando bracia per pugnora fanno pugnora.
> Multiplicando bracia per panora fanno panora: multiplicando per staiora fanno staiora.

(1 staioro = 12 panori = 12^2 pugnori = 12^3 braccia quadre). Tutta la struttura dell'esposizione, come pure la metrologia descritta, dimostra che in questo passo Pacioli non dipende da Fibonacci; parla dunque di un sistema realmente utilizzato al suo tempo nel suo paese.

2. L'Egitto faraonico

Questo modo di pensare le aree come composte di strisce di larghezza standardizzata si ritrova altrove nelle metrologie pratiche. Ben conosciuto è l'esempio dell'antico Egitto [Peet 1923: 24-25]. Per misurare le terre si utilizzava la misura lineare *khet* o «corda» uguale a 100 cubiti.

La misura superficiale fondamentale dei testi scolastici era il *setat* o *khet* quadro. Tuttavia, per l'agrimensura pratica si utilizzavano più spesso il «cubito di suolo» e il «mille di suolo», con un lato uguale ad un cubito e mille cubiti, rispettivamente, e l'altro uguale ad un *khet*.

La metrologia descritta da Peet è quella del secondo millennio. Però, anche se la matematica dell'Egitto ellenistico e romano ha un carattere eclettico, con molte influenze di provenienza babilonese, persiana o aramaica, il tratto che ci interessa qui si ritrova nei papiri demotici. Cosi, il «cubito di suolo» ritorna in un papiro dell'epoca romana [ed. Parker 1972: 71]. Ancora più notevole è un altro passo dello stesso papiro, dove l'*aroura* (il *khet* quadro, il quadrato con lato di 100 cubiti) è utilizzato come unità di lunghezza, uguale a 100 cubiti (senza che il nome dell'unità sia indicato, è vero, ma un'altra unità di 100 cubiti non esisteva all'epoca) [ed. Parker 1972: 72].

3. La matematica paleobabilonese

È meno conosciuta (perché meno visibile nella metrologia) la presenza della stessa struttura nel pensiero paleobabilonese. Ben noto, invece, è il ruolo della concezione corrispondente nella misura dei volumi. Per le misure orizzontali, l'unità di base era il NINDAN o «pertica» (uguale a 12 cubiti, dunque circa 3 volte quella romana); per le misure verticali, d'altra parte, l'unità di base era il cubito. I volumi si misuravano in unità superficiali, intese semplicemente come provviste di una altezza di 1 [cioè, 1 cubito]. Altrimenti detto, nel momento in cui si pensa ai volumi, le unità superficiali sono viste come fette alte 1 cubito.

Per vedere come la stessa idea entri nel concetto di superficie bisogna analizzare la terminologia utilizzata nel loro calcolo. Fra i termini abitualmente tradotti come moltiplicazione, due sembrano legati a questo calcolo: *šutākulum* (o piuttosto, *šutakūllum*, probabilmente «fare che i due 'fattori' si tengano», cioè come lati di un rettangolo) e *našûm*, «alzare», con i loro sinonimi rispettivi[1]. Eppure *šutakūllum*, non denota un calcolo ma *la costruzione* del rettangolo; di solito, questa costruzione comporta un calcolo dell'area del rettangolo, che è data immediatamente dopo la costruzione; ma talora si parla del calcolo in una frase separata, e per il calcolo dell'area di un rettangolo già costruito si utilizza

[1] Per i termini «moltiplicativi» della matematica paleobabilonese e le loro interpretazioni, vedere [Høyrup 1990a: 46-49 e passim]; per l'origine e lo sviluppo del concetto di «alzare», vedere [Høyrup 1992: 351-52].

«alzare». Per il calcolo delle aree dei triangoli, dei trapezi e dei quadrangoli irregolari i calcolatori babilonesi si servono sempre dell'operazione «alzare».

«Alzare» si utilizza in generale per tutti i calcoli di grandezze concrete mediante la moltiplicazione. Di regola, l'ordine dei fattori dipende da considerazioni puramente stilistiche; per esempio, di solito è la grandezza appena calcolata che è alzata all'altra. C'è però un'eccezione, e una sola: nel calcolo dei volumi, è sempre la base B che è alzata all'altezza a. Si tratta dunque di una metafora viva nel calcolo dei volumi e morta in tutti gli altri luoghi; per conseguenza di una metafora la cui origine si trova esattamente nel calcolo dei volumi: un prisma $a \times B$ si ottiene quando «l'altezza virtuale» della base, quella di una superficie B vista come fetta (dunque 1 cubito), è «alzata» all'altezza vera a. L'idea corrisponde alla definizione della moltiplicazione trovata nei *Elementi* di Euclide (VII, def. 15): Il prodotto di a e B contiene B tante volte quante a contiene l'unità.

Il trasferimento della metafora alla misura delle superfici presuppone che le superfici siano viste come composte di strisce (di larghezza 1 NINDAN, come sono composti i volumi di fette alte 1 cubito). Allora, un rettangolo $a \times b$ si ottiene quando la striscia $1 \times b$ (la cui area è uguale alla sua lunghezza b) è «alzata» alla larghezza vera a.

Un altro luogo dove si manifesta l'idea di una «larghezza virtuale» della linea è nei testi detti «algebrici». È una vecchia osservazione che in questi testi le lunghezze sono addizionate alle aree o ne sono sottratte; operazioni che sono state viste come geometricamente assurde, ciò che è stato uno degli argomenti centrali per vedere questa «algebra» come una tecnica puramente numerica, nonostante il suo vocabolario geometrico[2]. Come ho mostrato altrove[3], questa conclusione è sbagliata: una interpretazione numerica spiega i numeri che si presentano nei testi, ma non la struttura della terminologia, né i particolari dell'esposizione verbale, né l'ordine delle operazioni matematiche; invece, questi livelli della lettura impongono una decifrazione geometrica.

È manifesto che certi testi babilonesi vedono l'addizione di lunghezze e superfici come ambigua. Per parlarne utilizzano una operazione che permette l'addizione delle misure numeriche delle due grandezze senza riguardo al senso concreto, e per tradurre la questione in problema geometrico procurano dopo esplicitamente la lunghezza con uno

[2] «It is true that they illustrated unknown numbers by means of lines and areas, but they always remained numbers. This is shown at once in the first example, in which the area xy and the segment x-y are calmly added, geometrically nonsensical» [van der Waerden 1962: 72].

[3] Vedere in primo luogo [Høyrup 1990a].

«sporto 1», una larghezza che converte la linea s in un rettangolo $l \times s$. Con questo sotterfugio, l'ambiguità è eliminata.

D'altra parte per la sottrazione, per esempio di un lato dall'area di un quadrato, non esiste una distinzione equivalente fra operazione numerica e operazione concreta. Inoltre, altri testi effettuano anche l'addizione di lunghezze e superfici senza far ricorso alla differenza fra operazioni e senza parlare dello «sporto»[4]; invece presuppongono direttamente le lunghezze come strisce che possono essere congiunte alle superfici o esserne tagliate.

Nonostante che la testimonianza della metrologia non sia del tutto limpida, anche in fondo al pensiero matematico paleobabilonese (particolarmente quando ci avviciniamo alla pratica geometrica) ritroviamo dunque la concezione delle lunghezze come portatrici di una «larghezza virtuale».

4. Euclide – «Erone» – Platone

Euclide afferma che una linea è una lunghezza senza larghezza (μηκος απλατες — *Elementi* I, def. 2, [ed. Heiberg 1883:1]). Né le *Definitiones* di Erone [ed. Heiberg 1912: 14-16] né il commentario di Proclo [96-100; trad. Morrow 1970: 79-82] suggeriscono che questa delimitazione (il senso etimologico di ὁρος, tradotto «definizione») del concetto sia una demarcazione rispetto all'idea della linea-striscia. A questo livello della matematica greca — quella della teoria matematica matura — non c'è traccia di una larghezza virtuale che appartiene alla linea.

Ad altri livelli, quelli più vicini alla misura pratica o in polemica con questi, esistono almeno delle tracce.

In primo luogo ci sono le due antologie dello pseudo-Erone, *Stereometrica* e *De mensuris* [ed. Heiberg 1914], nelle quali si spiega come trovare «quanto genera un piede sopra un piede» (*Stereometrica* 69; un po' differente *De mensuris* 27). La versione della *Stereometrica* discute dapprima 1 piede sopra 1 piede, moltiplicando 16 per 16, poiché «1 piede possiede 16 dita». Poi, per trovare e spiegare 1 1/2 piede sopra 1

[4] Per di più, i testi che presuppongono la larghezza virtuale sembrano essere quelli che sono più prossimi alle origini della disciplina, i cui primi elementi sono stati adottati dalla scuola degli scribi da un ambiente di agrimensori, forse intorno al 1800 a.C. — vedere [Høyrup 1994]. La distinzione terminologica anziché il concetto esplicito dello sporto sono dunque fenomeni secondari, ripercussioni di una critica scolastica delle ambiguità assunti insieme con la tecnica dei geometri pratici.

1/2 piede moltiplica 24 per 24, dividendo dopo il numero 576 che risulta per 16; trasforma dunque il quadrato in una striscia larga 1 piede, e trova la sua lunghezza essere di 36 [dita] o 2 1/4 piedi.

Che si tratti veramente di una intuizione della striscia e non di un semplice schema di calcolo è dimostrato con il terzo calcolo, quello di (1/2 + 1/4) piede sopra (1/2 + 1/4) piede. Infatti moltiplica (8 + 4) con (8 + 4) e trova 144; ma invece di dividere per 16 (ciò che produrrebbe una «striscia» poco accettabile per l'intuizione perché meno lunga che larga) mette il prodotto direttamente in relazione con $16 \times 16 = 256$ e trova il rapporto essere di 1/2 + 1/16.

Fin qui, il *De mensuris* esegue gli stessi passi; ma mentre la *Stereometrica* si ferma a questo punto, il *De mensuris* continua con 2 piedi sopra 2 piedi e (2 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16) piedi sopra (2 + 1/2 + 1/4 + + 1/8 + 1/16) piedi; in entrambi i casi ritorna alla trasformazione in striscia, confermando così che questo è il metodo da utilizzare quando la striscia prodotta è una striscia vera.

Il *De mensuris* 25 — un calcolo alternativo (o erroneo, oppure corrotto) della capacità di un teatro — presenta un secondo esempio. In esso si trova l'area riservata agli spettatori come il prodotto del suo perimetro esterno (100 piedi) ed interno (80 piedi), dunque 8000 piedi. Questo è anche il numero di spettatori, poiché «su 1 piede si siede un uomo, vuol dire su 16 dita». A questo proposito Heiberg, pensando come un matematico moderno, fa notare che dovrebbero essere «256 dita», poiché si tratta di un'area. Tuttavia, le parole del testo sono legittime se l'area è percepita come composta da strisce larghe 1 piede e con una lunghezza totale di 8000 piedi, in particolare se la larghezza dei gradini è 1 piede; ma poiché quest'ultimo argomento sembra essere superfluo, l'idea di vedere un'area in tal modo era in apparenza sentita naturale[5].

Un esempio meno ambiguo di questi si trova nella *Geometrica*, anche questa un'antologia pseudo-eroniana (24,3 — ed. Heiberg 1912: 418)[6]. Si tratta di un problema del tipo dell'«algebra» paleobabilonese (e effettivamente il problema sembra avere le sue radici nella stessa tradizione di agrimensori che era stata l'ispirazione per l'algebra della scuola degli scribi paleobabilonesi; cf. [Høyrup 1993] e nota 4). Il capitolo tratta di un quadrato, la cui area (A) insieme con il perimetro ($4l$) è di 896 piedi; bisogna separare l'area dal perimetro. Le quattro unità sono

[5] La larghezza dei gradini nei teatri veri non può servirci. Nel capitolo precedente (il cui calcolo è giusto dal punto di vista matematico), la distanza fra gradini è pressappoco 10 cm! Anche lì, una persona occupa 1 piede di lunghezza.

[6] La traduzione di Heiberg maschera una parte dell'argomento geometrico; faccio una parafrasi stretta del testo greco.

«messe fuori» (εκτιθημι) del quadrato. Se ne prende la metà, e viene 2 *piedi* (vale a dire che il lato è veramente visto come un rettangolo di lunghezza *l* e larghezza 1 piede). La [linea di] 2 piedi è messa sopra se stessa, e vengono 4 piedi. Se questi sono aggiunti agli 896, vengono 900 piedi, cioè un quadrato con un lato di 30 piedi. Poiché dalle 4 è stata «tolta di sotto» (υφαιρεω) la metà, vengono [come residuo] 2 piedi; e restano [per il lato del quadrato originale] 28 piedi. L'area è dunque [28 × 28 =] 784 piedi, e il perimetro [4 × 28 =] 112 piedi. Se questi due valori sono sommati insieme, viene 896, che è l'area insieme con il perimetro. Il procedimento può essere seguito sulla figura.

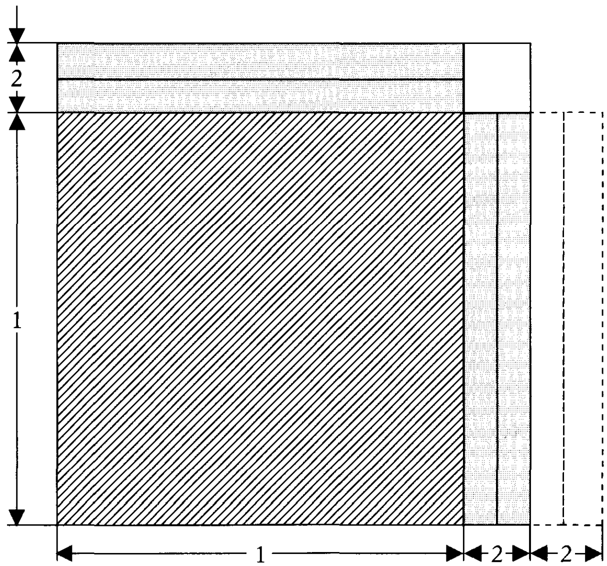

Figura 1.

Heiberg afferma che il compilatore ha copiato senza comprendere. È ovviamente possibile, anche se l'argomento di Heiberg sembra sbagliato[7]. Ma in questo caso ha copiato un testo greco scritto da qualcuno che comprendeva, e non tradotto lui stesso un testo scritto in un'altra lingua ne' copiato una tradizione fatta senza comprensione, come dimostrano non solo l'utilizzazione della misura greca del piede, ma anche altre divergenze dello stile delle fonti possibili (sia la tradizione babilonese-aramaica-araba, sia la matematica eclettica dei papiri demotici). In generale, le tracce dell'idea di una larghezza virtuale, che abbiamo tro-

[7] Heiberg non ha seguito il processo geometrico, e non capisce che per trovare il lato l bisogna sottrarre da 30 esattamente questo 2 che è rimasto quando la metà è stata tolta e «messa sopra». Vede dunque questo passo del testo come manifestazione di comprensione mancata.

vato nello pseudo-Erone, sono legate a concetti e pratiche greci; possiamo concludere che riflettono abitudini mentali diffuse anche fra i calcolatori greci.

Sia le lunghezze sia le aree sono già misurate in piedi nei dialoghi platonici. È il caso di due passi famosi fra gli storici della matematica, dove Platone si riferisce al concetto di δυναμις: *Theaetetus* 147D, *Politicus* 266B. Già qui, l'indagine dei testi pseudo-eroniani suggerisce che le espressioni διπους, τριπους e τεντεπους non devono essere interpretate come misure astratte, ossia come 2, 3 e 5 piedi quadri, ma invece come indicazioni che le aree di cui si parla sono uguali a strisce lunghe 2, 3 e 5 piedi [e larghe 1 piede].

C'è però un altro passo platonico che è più illuminato dall'idea delle strisce standardizzate: *Le leggi* 819D-20B [trad. Zadro 1952: 235-236], che parla dell'ignoranza di «tutti i Greci» (ordinari; il contesto dimostra che i matematici non sono inclusi) riguardo alla commensurabilità. Il passo tratta dapprima, in generale, dell'opinione che lunghezza, larghezza e profondità «siano tutte e tre commensurabili fra di loro»; e quindi, specificando, di due errori particolari:

(i) che «si può misurare una lunghezza con una lunghezza, una larghezza con una larghezza e una profondità con una profondità»,

e

(ii) che «la larghezza e la lunghezza [sono commensurabili] rispetto alla profondità, e la lunghezza e la larghezza fra di loro».

Il primo errore si riferisce, senza dubbio, alla scoperta dei rapporti irrazionali, per esempio (il paradigma di Aristotele) quello fra il lato e la diagonale di un quadrato: non è vero che ogni lunghezza può misurare tutte le altre. Il secondo è più oscuro (cf. la discussione in [Mueller 1992: 94-95]). Se lunghezza, larghezza e profondità si intendono come estensioni lineari, il secondo errore non è differente dal primo. Un'altra possibilità è di comprendere «larghezza» e «profondità» come ellissi per «quantità che possiede *anche* larghezza» (dunque un'area) e «quantità che possiede *anche* profondità» (dunque un corpo, poiché questa dimensione è definita qui e altrove da Platone come «il terzo»).

A favore della seconda interpretazione parla non solamente il fatto che da questo punto di vista, (ii) diventa veramente un errore diverso da (i), ma anche le abitudini del linguaggio matematico. Quando il giovane Theaeteto definisce numeri *quadrati* (*Theaetetus* 147E-148A) i numeri che possono generarsi come prodotti di fattori uguali (ma anche, non occorre dirlo, di fattori differenti) e *numeri oblunghi* gli altri — quelli che possono essere generati *solamente* come prodotti di fattori differenti —, siamo di fronte a un'ellissi analoga; la figura si ripete quando, un momento dopo, parla delle linee che sono *solamente* misurabili *dynamei* (ossia, quando sono intese come parametri di un quadrato, cf. [Høyrup 1990b]) come *dynameis* e degli altri — quelli che hanno *anche* una misura quando sono intesi direttamente come lunghezze — come *lunghezze*.

Più vicina nel contenuto alle ellissi presunte delle *Leggi* è quella presente nella definizione della linea degli *Elementi*. Come spiega Proclo nella sua discussione [196-97; trad. Morrow 1970: 79], non c'è bisogno di dire «senza larghezza e senza profondità» poiché tutto quello che è senza larghezza manca anche di profondità: «negando alla linea la larghezza [Euclide] la priva anche di profondità».

Nondimeno, Ian Mueller preferisce (con una punta di dubbio) la prima interpretazione. Infatti, l'errore di supporre le lunghezze, le superfici e i corpi commensurabili solamente perché tutti sono misurati in piedi gli sembra così grossolano che non sia possibile parlare di (ii) come di un errore.

Però, come abbiamo visto, la misura comune in «piedi» è più di una semplice mancanza di simboli per distinguere «piedi», «piedi^2» e «piedi^3». È coinvolto tutto un modo di pensare: se una lunghezza comporta una larghezza virtuale (e attuabile quando c'è bisogno), non è un errore grossolano pensare che le lunghezze e le superfici possono essere commensurabili; da questo punto di vista non è neppure un errore.

Lo era tuttavia dal punto di vista di coloro che hanno fatto della geometria una scienza invece di una tecnica. Per loro, come per Platone, non solamente era un errore, ma un errore che bisognava estirpare, come era da estirpare l'altro, che tutte le lunghezze fossero commensurabili fra di loro. Ricordiamoci dello «sporto» nella scuola paleobabilonese, che sembra aver avuto una funzione corrispondente (vedi nota 4).

5. Conclusione

Ritorniamo alla definizione della linea. Né Erone (il vero) né Proclo sembrano comprendere «senza larghezza» come inteso a escludere l'idea della linea-striscia; probabilmente il problema era già dimenticato dai matematici quando Euclide scrisse i suoi *Elementi*. Ma la definizione non è invenzione di Euclide. Si ritrova nelle stesse parole (come definizione già in uso) in *Topici* 143b11 [ed. Tredennick & Forster 1960: 591]; è possibile che fosse la definizione utilizzata dai matematici amici di Platone; è anche possibile che fosse più antica. Quello che è interessante è l'argomento di Aristotele: una tale definizione richiede che il genere (le lunghezze) sia diviso in due specie, le lunghezze provviste di larghezza e quelle che ne sono sprovviste. Infatti, dice Aristotele, queste specie esistono tutte e due; questo dimostra che le idee [platoniche] non possono esistere — l'idea della lunghezza o avrebbe larghezza, o no, ma nei due casi sarebbe impossibile l'esistenza di ambedue le specie del stesso genere.

Non è sicuro che le «lunghezze provviste di larghezza» siano le strisce dell'agrimensura pratica; potrebbero anche essere superfici. Né, però, sembra escluso. Resta possibile che la delimitazione «senza larghezza» sia stata dapprima intesa come demarcazione rispetto all'idea della linea-striscia.

Più fondata è l'interpretazione del passo delle *Leggi*. Solamente l'idea delle linee-strisce (e delle superfici-fette) ci permette di trovare due errori tanto differenti quanto sostanziali.

Con riguardo ai testi matematici, la mancata nozione della linea-striscia è stata la responsabile principale dell'interpretazione sbagliata dell'«algebra» babilonese come tecnica puramente numerica. Come abbiamo visto, l'«errore» (ii) è stato estirpato a tal punto che Heiberg, quando ha fatto l'edizione della *Geometrica* pseudo-eroniana, ha visto un errore dove invece c'era una descrizione precisa e corretta.

Ogni pensiero matematico che funziona comporta entro di sé una gamma di ambiguità. Nella geometria euclidea, per esempio, un quadrato è *una figura* (uno σχημα — *Elementi* I, def. 25), dunque qualcosa contenuta entro uno o più *limiti* (οϱοι — def. 14). Ma un quadrato può anche essere uguale a una o più figure (per esempio *Elementi* II, prop. 14), ed è dunque ridotto da questo punto di vista alla sua area. In un discorso matematico determinato, queste ambiguità concettuali restano di regola nascoste, contenute nello spazio delle operazioni da cui dipendono i concetti e di cui parla la terminologia: se un quadrato è tagliato da una diagonale, si tratta ovviamente della figura; se è detto 5 volte un altro si tratta dell'area.

Questa assenza di pedanteria contribuisce all'efficienza del pensiero. Ma quando il matematico, sia il matematico-storico, sia il matematico-insegnante, crede che solamente il discorso degli altri e non il suo comporti ambiguità; quando non capisce che anche le ambiguità degli altri sono solamente virtuali poiché contenute nel *loro* spazio di operazioni; quando dimentica dunque che esattamente queste *ambiguità diverse* sono chiavi privilegiate per comprendere il pensiero diverso degli altri; allora l'assenza di pedanteria nel proprio discorso diventa pedanteria e intolleranza verso gli altri, e ostacolo per la comprensione.

Forse scoprire questa intolleranza negli studi storici, e lo sforzo di vincerla in quell'ambito, può contribuire a vederla e vincerla nell'insegnamento della matematica, altrimenti più importante in questo mondo, lo storico deve confessarselo, della storia pura della disciplina.

Bibliografia

Boncompagni, Baldassarre (ed.), 1862. Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo. Vol. II. *Practica geometriae* e *Opusculi*. Roma: Tipografia delle Scienze Matematiche e Fisiche.

Heiberg, J.L. (ed., trans.), 1883. Euclidis *Elementa*. Vol. I. (Euclidis Opera omnia, vol. I). Leipzig: Teubner.

Heiberg, J.L. (ed., trans.), 1912. Heronis *Definitiones* cum variis collectionibus. Heronis quae feruntur *Geometrica*. (Heronis Alexandrini Opera quae supersunt omnia, IV). Leipzig: Teubner.

Heiberg, J.L. (ed., trans.), 1914. Heronis quae feruntur *Stereometrica* et *De mensuris*. (Heronis Alexandrini Opera quae supersunt omnia, V). Leipzig: Teubner.

Høyrup, Jens, 1990a. «Algebra and Naive Geometry. An Investigation of Some Basic Aspects of Old Babylonian Mathematical Thought». *Altorientalische Forschungen* 17, 27-69, 262-354.

Høyrup, Jens, 1990b. «Dynamis, the Babylonians, and Theaetetus 147c7-148d7». Historia Mathematica 17, 201-222.

Høyrup, Jens, 1992. «The Babylonian Cellar Text BM 85200 + VAT 6599. Retranslation and Analysis». Pp. 315-358 in S. S. Demidov et al (eds), *Amphora*. Festschrift fur Hans Wussing zu seinem 65. Geburtstag. Basel etc.: Birkhauser.

Høyrup, Jens, 1994. «The Four Sides and the Area». Oblique Light on the Prehistory of Algebra». In corso di pubblicazione in Ronal Calinger (ed.), *History of Mathematics: Sources, Studies, and Pedagogic Integration*. Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.

Morrow, Glenn R. (ed., trans.), 1970. Proclus, *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Mueller, Ian, 1992. «Mathematics and Education: Some Notes on the Platonic Programme». Pp. 85-104 *in* I. Mueller (ed.), *Peri Ton Mathematon*. Edmonton, Alberta: Academic Printing and Publishing.

Pacioli, Luca, 1523. *Summa de Arithmetica geometria Proportioni: et proportionalita*. Novamente impressa. Toscolano: Paganinus de Paganinis. [1 ed. 1494].

Parker, Richard A., 1972. *Demotic Mathematical Papyri*. Providence & London: Brown University Press.

Peet, T. Eric, 1923. *The Rhind Mathematical Papyrus, British Museum 10057 and 10058*. London: University Press of Liverpool.

Tredennick, Hugh, & E. S. Forster (eds, trans.), 1960. Aristotle, *Posterior Analytics* and *Topica*. (Loeb Classical Library 391). Cambridge, Mass.: Harvard University Press / London: Heinemann.

van der Waerden, B. L., 1962. *Science Awakening*. 2nd Edition. Groningen: Noordhoff. [1 ed. 1954]

Zadro, Attilio (trad.), 1952. Platone, *Dialoghi*. Vol. VII. *Le leggi*. Bari: Laterza.

Pervenuto in redazione il 10 settembre 1994

Broad Lines
A forgotten geometrical ambiguity[*]

In memoriam
A. P. YOUSCHKEVITCH, 1906–1993
and
IVOR BULMER-THOMAS, 1905–1993

The following pages explore the traces of a way of thinking of areas and lengths that seems strange to us but which in a number of mathematical cultures was so familiar that there was no need to explain it: so strange and so familiar, indeed, that modern historians have declared passages in the sources that reflect this conceptual structure to be erroneous, confused or meaningless. I refer to the habit to imagine lines as carriers of a virtual breadth equal to one length unit, and areas as composed of such unit strips. This habit was widely spread in many environments of practical mensuration, where it was easy to agree on the choice of a single standardized breadth: the basic unit of length; where, so to speak, land was measured as cloth is still sold nowadays, with its physically determined breadth. But it is also reflected in texts which are more theoretical origin in origin though still inspired or coloured by practical mensuration and its language.

Italian mensuration, from Fibonacci to Pacioli

In the introduction to his *Pratica geometrie*, Leonardo Fibonacci explains linear and surface measures. In the first lines [ed. Boncompagni 1962: 3–4], nothing will surprise a modern mind: a *cubita superficialis* is a square whose sides equals a *cubita linealis*; the same relation holds for the *ulna superficialis* with regard to the *ulna linealis* and for the *pertica superficialis* with regard to the *pertica linealis*.

Next, Fibonacci proceeds with the system used in his hometown Pisa – which is distinct from what we are accustomed to. A *pertica* ("rod") consists of 6 feet, and a foot of 18 points or ounces; and even a square or surface rod consists of 6 surface feet since, as Fibonacci explains, a surface foot has the length of a rod

[*] Translated from "Linee larghe. Un'ambiguità geometrica dimenticata". *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche* **15** (1995), 3–14.

and the width of $^1/_6$ rod (that is, a foot). The measure of a foot in square is instead called a *denarius*. A surface *ounce* is similarly a rectangle 1 rod×1 ounce.

Larger areas are measured in the units *scala* (= 4 rods), *panorum* (= $5\,^1/_2$ rods), *stariorum* (= 12 *panori*) and *modiorum* (= 24 *staiori*). All of these are primarily surface measures, but they are also understood as linear measures – where 1 linear *panorum* is the length which, when provided with a width of 1 rod, corresponds to an area of 1 surface *panorum*. They are used, Fibonacci informs us, in the trading of fields, building sites and houses – that is, in practical life.

We find as much when Luca Pacioli explains in the geometrical part of his *Summa de arithmetica* [1523: II, fols 6^v–7^r] the metrology used in Florence when land is sold. Here, the recurrent breadth is the *braccia* ("cubit"):

> Multiplying cubit by cubit: makes square cubit.
> Multiplying cubit by *pugnora* makes *pugnora*.
> Multiplying cubits by *panora* makes *panora*: multiplying by *staiora* makes *staiora*.
> ...[1]

(1 staioro = 12 panori = 12^2 pugnori = 12^3 braccia). The whole structure of the exposition, as well as the metrology that is involved, show that in this passage of the text Pacioli does not depend on Fibonacci. He thus speaks of a system which was really used in his times in Florence.

Pharaonic Egypt

This way to think of areas as composed of strips of standard breadth is found in other practical metrologies. A well-known example comes from ancient Egypt [Peet 1923: 24–25]. In the measurement of land, the linear measure *khet* ("rope") equal to 100 cubits was used. The basic surface unit of school texts was the *setat*, a square *khet*. Practical mensuration, however, more often made use of the "cubit-of-land" and the "thousand-of-land", with one side equal to a cubit respectively 1000 cubits, and the other equal to a *khet*.

The metrology described by Peet belongs to the second millennium BCE. Even though the mathematics of Hellenistic and Roman Egypt was eclectic in character, however, with influences of Babylonian, Persian or Aramaic origin, the feature which interests us here recurs in Demotic papyri. The "cubit-of-land" thus turns

---

1 [Added to the translation] Multiplicando bracia per bracia: Fanno bracia quadre.
Multiplicando bracia per pugnora fanno pugnora.
Multiplicando bracia per panora fanno panora: multiplicando per staiora fanno staiora.
...

up in a papyrus from the Roman epoch [ed. Parker 1972: 71]. Even more remarkable is another passage from the same papyrus, in which the *aroura* (the square *khet*, the square with a side equal to 100 cubits) is used as a length unit, equal to 100 cubits (without indication of the name of the unit, it is true, but no other unit of 100 cubits existed at the epoch) [ed. Parker 1972: 72].

Old Babylonian mathematics

The presence of the same structure in Old Babylonian mathematical thought is less conspicuous in the metrology and hence less familiar. Familiar is instead the role of an analogous conception of the measure of volumes. For horizontal distances, the basic unit was the n i n d a n or "rod" (equal to 12 cubits, thus roughly thrice as long as the Roman *pertica*). For vertical distances, on the other hand, the basic unit was the cubit. Volumes were measured in surface units, understood simply as provided with a height of 1 (that is, 1 cubit). In other words, when volumes were thought of, the surface units were seen as slices whose thickness equalled 1 cubit.

In order to see how the same idea enters into the conception of surfaces we must analyze the terminology that was used to describe their calculation. Among the terms habitually translated as multiplication, two seem to be linked to this calculation: *šutākulum* (or, rather, *šutakūllum*, probably meaning "cause the two 'factors' to hold each other", namely as the sides of a rectangle) and *našûm*, "to raise", both with synonyms[2]. However, *šutakūllum* does not refer to the calculation but to *the construction* of the rectangle. Usually, this construction implies a calculation of the area of the rectangle, which is stated immediately after the construction. At times, however, the calculation is spoken of in a separate clause; moreover, the calculation of the area of a rectangle which has been constructed previously is done by "raising". Areas of triangles, trapezia and irregular quadrangles are always found by "raising".

In general, "raising is used for all determinations of a concrete magnitude via multiplication. Usually, the order of factors depends on purely stylistic considerations; for instance, it is usually the magnitude which has just been determined that is "raised" to the other one. There is an exception, however, but only one: in the determination of volumes, it is invariably the base B that is "raised" to the height h. The term thus represents a live metaphor when the

[2] The various "multiplicative" terms of Old Babylonian mathematics and their interpretation are discussed in [Høyrup 1990a: 46–49 and *passim*]; the origin and development of the concept of "raising" is addressed in [Høyrup 1992: 351–52].

determination of volumes is concerned, and a dead one in all other contexts – which means that the origin of the metaphor is exactly in the calculation of volumes: a prism $h \times B$ is obtained when the "virtual height" 1 cubit of a surface B understood as slice is "raised" to the actual height h.The idea corresponds to the definition of multiplication given in Euclid's *Elements* (VII, def. 15): the product of h and B contains B as many times as a contains unity.

The transfer of the metaphor to the measurement of surfaces presupposes that these are conceived as composed from strips (of breadth 1 n i n d a n , as volumes are composed of slices of thickness 1 cubit). Then, a rectangle $a \times b$ is obtained by "raising" a strip $1 \times b$ to its true breadth a.

The idea of a "virtual breadth" also manifests itself in the so-called "algebraic" texts. It is an old observation that in these texts, lengths are added to or subtracted from areas – operations that have always been seen as geometrically absurd, which has been one of the arguments to understand this "algebra" as a purely numerical technique, its geometrical vocabulary notwithstanding.[3] As I have shown elsewhere,[4] this conclusion is mistaken: a numerical interpretation explains the numbers that appear in the texts, but neither the structure of the terminology nor the details of the verbal exposition, nor the order of mathematical operations; instead, these levels of the text impose a geometrical reading.

Indisputably, certain Babylonian texts regard the addition of lengths and surfaces as ambiguous. In order to speak of it they choose a term that allows the addition of the measuring numbers of the two magnitudes without any reference to their concrete signification, and in order to transform the question into a geometric problem they then provide the length with a "projection 1", a breadth that transforms the line s into a rectangle $1 \times s$. This device eliminates the ambiguity.

However, when it comes to the subtraction, for instance of a side from the area of a square, no similar distinction between numerical and concrete operation is at hand. Other texts, moreover, make the addition of lengths and areas without recurring to this distinction, and without introducing the "projection". Instead, they assume that the lengths are strips that can be joined with or cut away from

[3] "It is true that they illustrated unknown numbers by means of lines and areas, but they always remained numbers. This is shown at once in the first example, in which the area xy and the segment $x–y$ are calmly added, geometrically nonsensical" [van der Waerden 1962: 72].

[4] See [Høyrup 1990a].

the surfaces.[5]

Even though the metrological evidence is not quite clear, we thus find Old Babylonian mathematical thought (in particular when we approach geometrical practice) to presuppose a notion of lengths as carriers of a "virtual width".

Euclid – "Hero" – Plato

Euclid declares that a line is a length without breadth (μῆκος ἀπλατές – *Elements* I, def. 2, [ed. Heiberg 1883: 1]). Neither Hero's *Definitions* [ed. Heiberg 1912: 14–16] nor Proclos's commentary [96–100; trans. Morrow 1970: 79–82] suggest this delimitation (the etymological meaning of ὅρος, translated "definition") of the concept should be meant to fend if off from the idea of a strip-line. At this level of Greek mathematics – that of mature theory – there is no trace of the idea of lines carrying a virtual breadth.

At other levels – those closer to practical mensuration or polemicizing against its habits – at least traces do exist.

Firstly, there are two pseudo-Heronian anthologies, *Stereometrica* and *De mensuris* [ed. Heiberg 1914], in which it is explained how to find "how much results from by 1 foot above (ἐπί) 1 foot" (*Stereometrica* II.69 [ed. Heiberg 1914: 160–162]; slightly different *De mensuris* **27** [ed. Heiberg 1914: 182]).
The *Stereometrica* version discusses first 1 foot above 1 foot, multiplying 16 by 16 (since "1 foot contains 16 fingers"). Then, in order to find and explain $1\frac{1}{2}$ foot above $1\frac{1}{2}$ foot it multiplies 24 by 24, dividing afterwards the resulting number 576 by 16 ; that is, it transforms the square into a strip with breadth 1 foot, and finds it length to be 36 [fingers] or $2\frac{1}{4}$ feet.

That we are really dealing with an intuition of strips and not with a mere calculational scheme is shown by the third calculation, that of ($\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$) foot above ($\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$) foot. The text multiplies (8+4) by (8+4) and finds 144. But instead of dividing by 16 (which would produce a somewhat counter-intuitive "strip" with a breadth exceeding the length) it relates the product directly to 16×16 = 256 and finds the ratio to be $\frac{1}{2}+\frac{1}{16}$.

Until this point, *De mensuris* does the same ; but while *Stereometrica* stops

[5] The texts that presuppose a virtual breadth seem to be those which are closest to the origin of the discipline, the first elements of which appear to have been adopted by the scribe school from a surveyors' environment, perhaps around 1800 BCE – see [Høyrup 1993]. The terminological distinction and the explicit notion of a "projection" are thus secondary phenomena, repercussions of a schoolmasters' critique of the ambiguities that had initially been taken over together with the techniques of the practical geometers.

here, *De mensuris* goes on with 2 feet above 2 feet and $(2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16})$ feet above $(2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16})$ feet; in both cases it returns to the transformation into a strip, confirming thus that this is the method to be used when a genuine strip is produced.

De mensuris **25** [ed. Heiberg 1914: 180] – an (either erroneous or corrupt) alternative determination of the capacity of a theatre – presents us with a second example. It finds the area reserved for the spectators as the product of the external and the internal perimeter (100 feet and 80 feet, respectively). This is also the number of spectators, since "on one foot sits a man, that is, on 16 fingers". Here Heiberg, thinking as a modern mathematician, observes that this should be "256 fingers", since an area is involved. However, the words of the text are justified if the area is perceived as strips 1 foot large and of total length 8000 feet, in particular if the breath of the steps is 1 foot ; but since the text seems to find the latter argument to be superfluous, the idea to conceive an area in this way was apparently felt natural.[6]

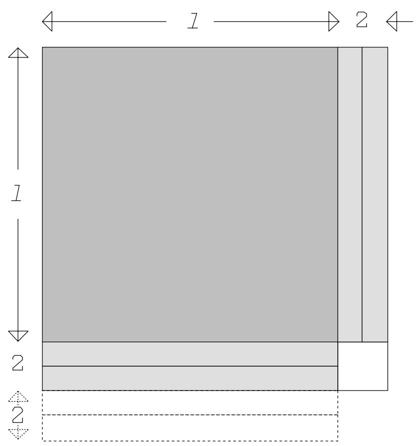

Figure 1.

Less ambiguous than these is an example that is found in the *Geometrica*, yet another pseudo-Heronian anthology (**24**,3 [ed. Heiberg 1912: 418])[7]. Here, a problem similar to those of Old Babylonian "algebra" (and indeed a problem that appears to be rooted in that very agrimensorial tradition which had inspired the Old Babylonian scribe school – cf. [Høyrup, forthcoming] and note 5): It deals with as square, whose area (A) together with its perimeter (4ℓ) amounts to 896 feet, and asks for the separation of the area from the perimeter. The 4 units are "put outside" (εκτίθημι) the square. Half of the 4 is taken, and 2 *feet* result – which implies that the side is really conceived of as a rectangle with length ℓ and width 1 foot. The [line of] 2 feet is put above itself, and 4 feet result. If these are joined to the 896, 900 feet result, and as side of the square thus 30 feet. Since from the 4, one half has been "taken away below" (ὑφαιρέω), two feet result [as remainder]; [as side of the original square] 28 feet remain. The

[6] The width of the steps of real theatres is of no use. In the preceding chapter (whose calculation is mathematically correct), the distance between steps is around 10 cm! Even here, each person occupies a length of 1 foot.

[7] Heiberg's translation hides part of the argument ; I provide a close paraphrase of the Greek text.

area is thus [28×28 =] 784 feet, and the perimeter [4×28 =] 112 feet. If everything is put together, 896 result, which is the area together with the perimeter. The procedure can be followed on Figure 1.

Heiberg claims the compiler to have copied without understanding. This is of course possible, but Heiberg's argument seems to be mistaken.[8] But even if he has copied, he has copied a Greek text written by somebody who understood. He neither translated a text written in another language, nor did he copy a tradition created without understanding; this is shown not only by the use of Greek metrology (the foot) but also by stylistic divergence with respect to possible sources (the Babylonian-Aramaic-Arabic tradition as well as the eclectic mathematics of Demotic papyri). In general, the traces of the idea of a virtual breadth that turn up in the pseudo-Heronian corpus are linked to Greek concepts and practices; we may conclude that they reflect mental habits that were widespread even among Greek calculators.

Lengths as well as areas are already measured in feet in Plato's dialogues. It happens in the two passages, famous among historians of mathematics, where Plato refers to the *dýnamis* concept: *Theaetetus* 147D and *Politicus* 266B. The examination of the pseudo-Heronian texts suggest that the Platonic expressions δίπους, τρίπους and πεντέπους should not be interpreted as abstract measures, that is, as 2, 3 and 5 square feet, but rather that the areas spoken about are equal to strips of length 2, 3 and 5 feet (and breadth 1 foot).

Another Platonic passage, however, illustrates better the idea of standardized strips : *Laws* 819D–820B [trans. Bury 1926].[9] "The Athenian" speaks of "a certain kind of ignorance [..] naturally inherent in all men", more specifically among all Greeks (ordinary Greeks, that is – the context shows that mathematicians are not included) concerning the belief that lengths, breadths and depths[10] "are commensurable with another"[11]. Afterwards this erroneous belief is specified

---

[8] Heiberg does not follow the geometric process, and does not understand that in order to find the side ℓ one has to detract from the 30 exactly those 2 that remained when the half was taken away and "put above". He therefore sees this passage as evidence of failing understanding.

[9] [Added to the translation] I replace the original reference to an Italian translation by one to R. G. Bury's Loeb volume. Not having the printed volume at hand, I use the online version at www.perseus.tufts.edu, checking with the appurtenant Greek text.

[10] [Added to the translation] Bury translates as "lines", "surfaces" and "solids", against the actual meanings of μῆκος, πλάτος and βάθος but anticipating what can be derived from the context, as done presently.

[11] [Added to the translation] The Greek text, better rendered by the Italian translation, says that they are "all measurable one by another" (πάντα μετρητὰ πρὸς ἄλληλ). The technical concept of commensurability is thus an illegitimate imposition on the part of Bury. Actually, according to the text it is supposed that the magnitudes can be measured by each other be either "absolutely" (σφόδρα) or "moderately" (ἠρέμα), which makes

in two points, namely

(1) "length is commensurable with length, breadth with breadth, and depth with depth",

and

(2) "as regards the relation of length and breadth to depth, or of breadth and length to each other – do not all we Greeks imagine that these are somehow commensurable with one another?"

The first error certainly refers to the discovery of irrational ratios, for example (Aristotle's paradigm) the ratio between the side and the diagonal of a square; it is not true that every line can measure any other line. The second is more obscure (cf. the discussion in [Mueller 1992: 94–95]). If length, breadth and depth are all understood as linear extensions, then the second error is no different from the first one. A different possibility is to understand "breadth" and "depth" as ellipses for "quantity which *also* possesses a breadth" (thus a surface) and "quantity which *also* possesses depth" (thus a solid, since this dimension is defined here and elsewhere by Plato as "the third").

In favour of this second interpretation speaks not only that it allows (ii) to be really another error than (i) but also the habitual shaping of the mathematical idiom. We encounter a similar ellipsis when the young Theaetetos defines *square* numbers (*Theaetetus* 147E–148A) as such numbers as can be generated as products of equal factors (but also, there is no need to explain it, of unequal factors) and as *oblong numbers* the others – those that can *only* be generated as products of different factors. The pattern is repeated when he speaks a little later of lines that are *only* measurable *dýnamei* (that is, when they are understood as parameters of a square) as *dýnameis* and of the others – those that *also* have a measure when they are understood directly as lengths – as *lengths*.

Closer to the substance of the presumed ellipsis of the *Laws* is the one that is contained in the definition of the line in the *Elements*. As Proclos explains in his commentary (96–97 [trans. Morrow 1970: 79]), there is no need to say "without breadth and without depth" since "everything that is without breadth is also without depth" – "denying breadth of [the line] he has also taken away depth".

None the less, Ian Mueller prefers (with a slight doubt) to stick to the first interpretation. The error to suppose that lengths, surfaces and solids are commensurable simply because they are all measured in feet seems to him to be so trivial that then one cannot speak of (ii) as an error.

However, as we have seen, the shared measure in "feet" is more than the

---

no sense if we think of the concept proper.

simple absence of symbols allowing a distinction between “feet”, “$feet^2$” and “$feet^3$”. A whole mode of thought is involved, and if a length carries a virtual breadth (that can be actualized when needed), then it is no trivial error to assume that lengths and surfaces can be measured by each other – actually no error at all.

Yet it is an error from the point of view of those who had transformed geometry into a science and no mere technique. For those, as for Plato, it was not only an error but an error that had to be eradicated, as was to be eradicated the error that all lines are commensurable. We may remember the “projection” of the Old Babylonian school, which appears to have served the same purpose (note 5).

Conclusion

Let us return to the definition of the line. Neither Hero (the true Hero) nor Proclos seems to understand that “without breadth” is meant to bar the idea of the strip-line; the difficulty was probably already forgotten when Euclid wrote his *Elements*. But the definition was not invented by Euclid. It is quoted verbatim (as an already current definition) in Aristotle’s *Topica* 143^b11 [ed. Tredennick & Forster 1960: 591]; possibly it was also the definition used by Plato’s mathematician-friends, and maybe it was even older. What is interesting is Aristotle’s argument: the definition presupposes that the genus (the lengths) is divided into two species, the lengths *provided with a breadth* and those *deprived of it*. Indeed, thus Aristotle, both species exist. This shows that (Platonic) ideas cannot exist: either the *idea of the length* would have breadth, or it would not; but in both cases, the existence of both species belonging to the same genus would be impossible.

We cannot be sure that the “lengths provided with a breadth” are the strips of practical mensuration; they might simply be surfaces. Nor is it excluded, however. It remains a possibility that the delimitation “without breadth” was originally meant as a demarcation excluding the strip-lines.

The passage from the *Laws* is more conclusive. Only the idea of strip-lines (and slice-surfaces) allows us to distinguish two errors that are genuinely different as well as substantial.

As regards the Old Babylonian mathematical texts, the failing understanding of the strip-line carries main responsibility for the erroneous interpretation of their “algebra” as a purely numerical technique. As we have seen, “error” (ii) has been so efficiently uprooted that Heiberg, when editing the pseudo-Heronian *Geometrica*, saw a blunder where the text presents us with a precise and correct description.

Any functioning system of mathematical thought contains an assortment of ambiguities. In Euclidean geometry, for instance, a square is *a figure* (a σχῆμα – *Elements* I, def. 25), thus something contained by one or more *limits* (ὅροι – def. 14). But a square may also be equal to one or more other figures (for instance, *Elements* II, prop. 14), in which respect it is thus reduced to its area. *Within* the discourse in question, these conceptual ambiguities normally remain hidden, regulated by the space of operations on which the concepts depend, and of which the terminology speaks: if a square is cut by a diagonal, *the figure* is obviously referred to; if it is five times another one, *the area* is necessarily meant.

This absence of pedantry contributes to the efficiency of thought. However, when the mathematician – be it the mathematician-historian or the mathematician-teacher – believes that only the discourse of others and not his own contains ambiguities; when he[12] does not understand that also the ambiguities of the other are virtual, not actual, since they are regulated by *their* operational space; when he thus forgets that these *different ambiguities* are privileged keys for understanding the different thinking of the other – then the absence of pedantry from his own discourse becomes pedantry and intolerance toward the other, and an obstacle for understanding.

Maybe discovering this intolerance in historical studies and the effort to overcome it may contribute to seeing it and overcoming it within the teaching of mathematics: a field which – the historian has to admit it – is much more important in this world than the pure history of the discipline.

Jens Høyrup
5 July 1994
translation 31 December 2010

[12] [Added to the translation] No feminist will probably reproach me that I choose here the male gender when translating the undeterminate gender of the original.

References

Boncompagni, Baldassare (ed.), 1862. *Scritti* di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo. Vol. II. *Practica geometriae* et *Opusculi*. Roma: Tipografia delle Scienze Matematiche e Fisiche.

Bury, R. G.(ed., trans.), 1926. Plato, *Laws*. 2 vols. (Loeb Classical Library). London: Heinemann / Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Heiberg, J. L. (ed., trans.), 1883. Euclidis *Elementa*. Vol. I. (Euclidis Opera omnia, vol. I). Leipzig: Teubner.

Heiberg, J. L. (ed., trans.), 1912. Heronis *Definitiones* cum variis collectionibus. Heronis quae feruntur *Geometrica*. (Heronis Alexandrini Opera quae supersunt omnia, IV). Leipzig: Teubner.

Heiberg, J. L. (ed., trans.), 1914. Heronis quae feruntur *Stereometrica* et *De mensuris*. (Heronis Alexandrini Opera quae supersunt omnia, V). Leipzig: Teubner.

Høyrup, Jens, 1990a. "Algebra and Naive Geometry. An Investigation of Some Basic Aspects of Old Babylonian Mathematical Thought". *Altorientalische Forschungen* **17**, 27–69, 262–354.

Høyrup, Jens, 1990b. "*Dýnamis*, the Babylonians, and Theaetetus 147c7—148d7". *Historia Mathematica* **17**, 201–222.

Høyrup, Jens, 1992. "The Babylonian Cellar Text BM 85200 + VAT 6599. Retranslation and Analysis". Pp. 315–358 *in* S. S. Demidov et al (eds), *Amphora*. Festschrift für Hans Wussing zu seinem 65. Geburtstag. Basel etc.: Birkhäuser.

Høyrup, Jens, forthcoming. "«The Four Sides and the Area». Oblique Light on the Prehistory of Algebra". Forthcoming *in* Ronal Calinger (ed.), *History of Mathematics: Sources, Studies, and Pedagogic Integration*. Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.[13]

Morrow, Glenn R. (ed., trans.), 1970. Proclus, *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Mueller, Ian, 1992. "Mathematics and Education: Some Notes on the Platonic Programme". Pp. 85–104 *in* I. Mueller (ed.), *Peri Tōn Mathēmatōn*. Edmonton, Alberta: Academic Printing and Publishing.

Pacioli, Luca, 1523. *Summa de Arithmetica geometria Proportioni: et proportionalita*. Novamente impressa. Toscolano: Paganinus de Paganino. [^{1}1494].

[13] [Added to the translation] Unfortunately, the paper was published (in 1996) without author's (and apparently without any) proofreading, and turned out to be marred by numerous catastrophic conversion errors. The manuscript version of the paper can be found at http://www.akira.ruc.dk/~jensh/Publications/4sides_manuscript.pdf. The argument is much more fully developed in my "On a Collection of Geometrical Riddles and Their Role in the Shaping of Four to Six 'Algebras'". *Science in Context* **14** (2001), 85–131.

Parker, Richard A., 1972. *Demotic Mathematical Papyri*. Providence & London: Brown University Press.

Peet, T. Eric, 1923. *The Rhind Mathematical Papyrus, British Museum 10057 and 10058*. London: University Press of Liverpool.

Tredennick, Hugh, & E. S. Forster (eds, trans.), 1960. Aristotle, *Posterior Analytics* and *Topica*. (Loeb Classical Library 391). Cambridge, Mass.: Harvard University Press / London: Heinemann.

van der Waerden, B. L., 1962. *Science Awakening*. 2nd Edition. Groningen: Noordhoff. [[1]1954].